

# Αλγεβρικές Δομές I (2018-2019)

## Φροντιστηριακές ασκήσεις #8

1. Έστω  $G$  μια ομάδα και  $H$  μια πεπερασμένη υποομάδα της  $G$  με την ιδιότητα ότι η  $H$  είναι η μοναδική υποομάδα της  $G$  με τάξη  $\#H$ . Να δείξετε ότι η  $H$  είναι κανονική.
2. Έστω  $(G, *)$  μια ομάδα και  $H$  μια κανονική υποομάδα της  $G$ . Έστω  $a, b \in G$  με  $a * b \in H$ . Δείξτε ότι  $b * a \in H$ . Επίσης, βρείτε υποομάδα  $H$  της  $S_3$  και  $a, b \in S_3$  ώστε  $a \circ b \in H$ , ενώ  $b \circ a \notin H$ .
3. Έστω  $G$  ομάδα. Δείξτε ότι η τομή οποιουδήποτε πλήθους κανονικών υποομάδων της  $G$  είναι κανονική υποομάδα της  $G$ .
4. Έστω  $f : G_1 \rightarrow G_2$  ένας ομομορφισμός ομάδων.
  - (1) Αν  $H$  είναι μια κανονική υποομάδα της  $G_1$ , να δείξετε ότι η  $f(H)$  είναι κανονική υποομάδα της ομάδας  $f(G_1)$ . Βρείτε παράδειγμα, όπου η υποομάδα  $f(H)$  δεν είναι κανονική υποομάδα της ομάδας  $G_2$ .
  - (2) Αν  $K$  είναι μια κανονική υποομάδα της  $G_2$ , να δείξετε ότι η  $f^{-1}(K)$  είναι κανονική υποομάδα της ομάδας  $G_1$ .
5. Θεωρούμε την υποομάδα  $\mathbb{Z}$  της προσθετικής ομάδας  $\mathbb{R}$ . Δείξτε ότι είναι κανονική υποομάδα και να βρεθούν όλα τα στοιχεία πεπερασμένης τάξης της ομάδας πηλίκο  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .
6. Θεωρούμε την υποομάδα  $T$  της ομάδας  $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ , όπου
$$T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$
Δείξτε ότι η υποομάδα  $T$  είναι κανονική και ότι η ομάδα πηλίκο  $\mathbb{C}^*/T$  είναι ισόμορφη με την πολλαπλασιαστική ομάδα των θετικών πραγματικών αριθμών.
7. Βρείτε τις τάξεις των ομάδων πηλίκο
$$\mathbb{Z}_6 / \langle [3]_6 \rangle, \quad \mathbb{Z}_{60} / \langle [12]_{60} \rangle, \quad \mathbb{Z}_{60} / \langle [39]_{60} \rangle.$$
8. Βρείτε την τάξη του στοιχείου:
  - (1)  $[5]_{12} + H$  στην ομάδα πηλίκο  $\mathbb{Z}_{12}/H$ , όπου  $H = \langle [4]_{12} \rangle$ .
  - (2)  $[26]_{60} + H$  στην ομάδα πηλίκο  $\mathbb{Z}_{60}/H$ , όπου  $H = \langle [12]_{60} \rangle$ .
9. Να δειχθεί ότι υπάρχουν ισομορφισμοί ομάδων:
  - (1)  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/H$  με την ομάδα  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ , όπου  $H = \langle (2, 2) \rangle$ .
  - (2)  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)/H$  με την ομάδα  $\mathbb{Z}_2$ , όπου  $H = \langle ([0]_2, [1]_4) \rangle$ .
  - (3)  $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)/H$  με την ομάδα  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , όπου  $H = \langle ([0]_2, [2]_4) \rangle$ .